" المحاضرة التاسعة "

مبرهنة (1): إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ مشتقة وكمولة حسب ريمان مشتق التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجود كما أن

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

مبرهنة (2): إذا كانت الدالة $f(x)$ كمولة حسب ريمان على $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ تكتب بالشكل:

$$g(x) = C + \int_a^x \varphi(t)\,dt \; ; \; x \in [a,b]$$

مع اعتبار أن $\int_a^b |\varphi(t)|dt$ موجود ويكون لدينا: $(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x).\varphi(x)\,dx$ فإن

مبرهنة (3): إذا كانت $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ تأخذ قيم ثابتة داخل المجالات الجزئية $[a,c_1],\dots,[c_m,b]$ حيث: $a<c_1<c_2<\dots<c_m<b$ فإن $(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)$ موجود وبالتالي

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right] + \sum_{i=1}^{m} f(c_i)\left[g(c_i+0)-g(c_i-0)\right] + f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right]$$

تمرين: احسب التكامل الآتي:

$$I=\int_0^2 x^2 \cdot dg(x) \;;\; g(x)=\begin{cases}-1 ; & 0\le x<\frac{1}{2}\\ 0 ; & \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\\ 2 ; & x=\frac{3}{2}\\ -2 ; & \frac{3}{2}<x\le 2\end{cases}$$

الحل: نلاحظ أن الدالة $f(x)=x^2$ مستمرة على $[0,2]$ وأن الدالة $g(x)$ تأخذ قيم ثابتة على المجالات $[0,\frac{1}{2}]$ ، $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ ، $[\frac{3}{2},2]$ وبالتالي تكون g محدودة التغير ولها انقطاع عند $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{2}$ وبالتالي فإن التكامل موجود حسب المبرهنة السابقة وبالتالي يكون لدينا

$$I=(0)^2\left[g(0+0)-g(0)\right]+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left[g\left(\tfrac{1}{2}+0\right)-g\left(\tfrac{1}{2}-0\right)\right]$$

$$+\left(\tfrac{3}{2}\right)^2\left[g\left(\tfrac{3}{2}+0\right)-g\left(\tfrac{3}{2}-0\right)\right]+(2)^2\left[g(2)-g(2-0)\right]$$

$$I=0+\frac{1}{4}(0+1)+\frac{9}{4}(-2-0)+4(-2+2)$$

$$I=\frac{1}{4}-\frac{18}{4}=-\frac{17}{4}$$

مبرهنة (تعميم): إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ لها انقطاع من النوع الأول $c_1, c_2, \ldots, c_n$ مع اعتبار أن $a<c_1<c_2<\ldots<c_n<b$ والدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق

وعليه تكون الدالة $g(x)$ دالة كل منها ... وبالتالي

$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)$ موجود

ويكون:

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)=(R)\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx+$$

$$f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left[g(c_i+0)-g(c_i-0)\right]+$$

$$f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right]$$

وعليه فإن المبرهنة هي تعميم للمبرهنة (1) و(2)

ملاحظة: المبرهنة (4) تعتبر تعميم للمبرهنة (1) لأنه إذا كانت الدالة $g(x)$ مستمرة على $[a,b]$ فإنها تؤول إلى المبرهنة (1)
أما إذا كانت $g(x)$ تأخذ قيم ثابتة في المجالات الجزئية وبالتالي $g'(x)=0$ وبالتالي تؤول إلى المبرهنة (3)

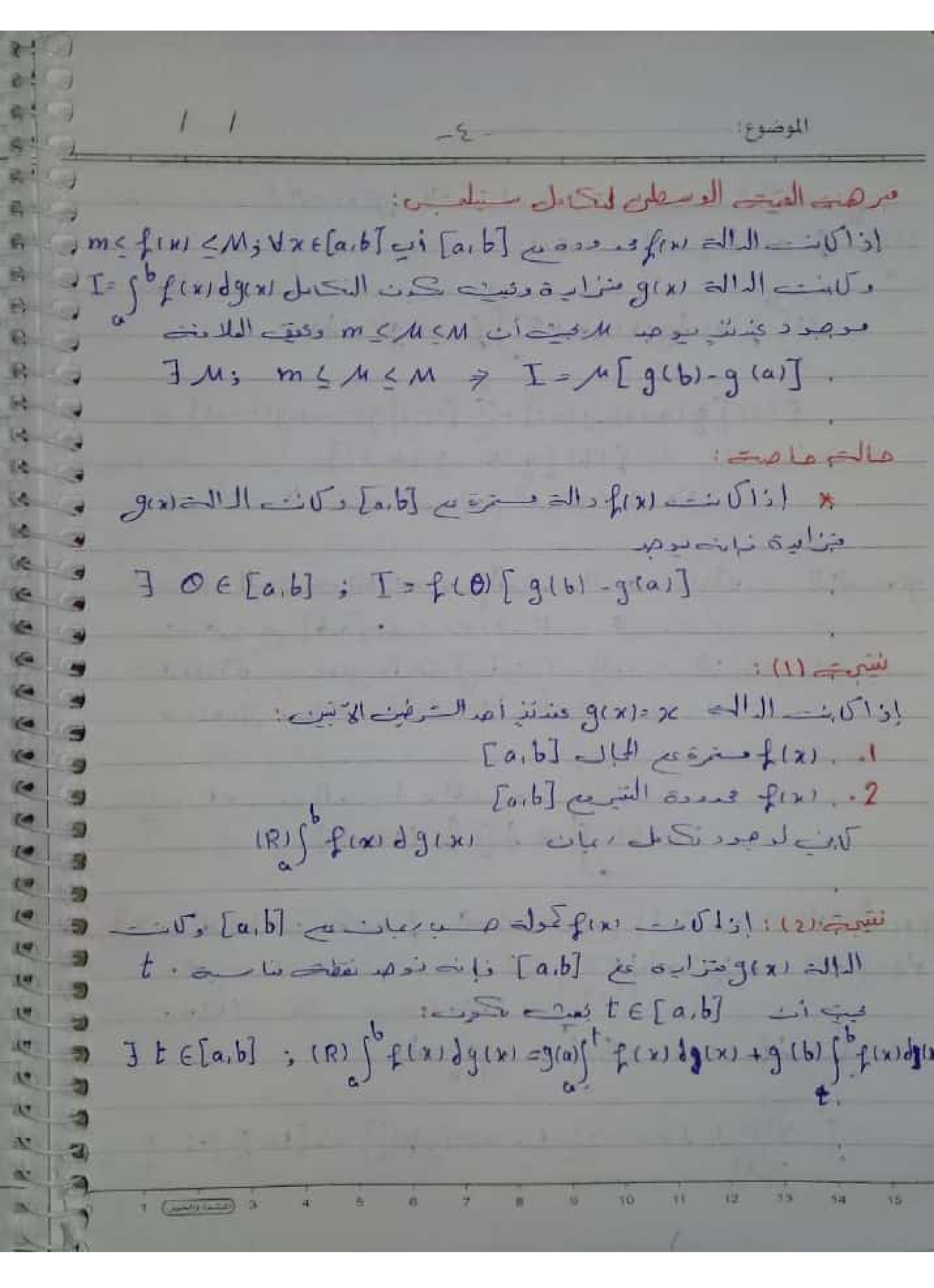
مثال: احسب التكامل الآتي:

$$(S)\int_0^1 x\, d\left[\ln(1+x^2)\right]$$

الحل: نلاحظ أن $f(x)=x$ دالة مستمرة على $[0,1]$ ، والدالة $g(x)=\ln(1+x^2)$ وهي قابلة للاشتقاق $\forall x\in[0,1]$: $|g'(x)|=\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\le 2$
وبالتالي تكون محدودة التغير

$$\therefore (S)\int_0^1 x\, d\ln(1+x^2)=(R)\int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$=2\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx=2\left[1-\operatorname{arctg}x\Big|_0^1\right]=2\left[1-\frac{\pi}{4}\right]=2-\frac{\pi}{2}$$



مبرهنة القيمة الوسطى لتكامل ستيلجس:

إذا كانت الدالة f(x) محدودة في [a,b] أي $m \le f(x) \le M ; \forall x \in [a,b]$ ، وكانت الدالة g(x) متزايدة وحيث يكون التكامل $I=\int_a^b f(x)\,dg(x)$ موجود عندئذ يوجد μ بحيث أن $m \le \mu \le M$ ويحقق العلاقة

$$\exists \mu ;\ m \le \mu \le M \Rightarrow I = \mu[g(b)-g(a)] .$$

حالة خاصة:

* إذا كانت f(x) دالة مستمرة في [a,b] وكانت الدالة g(x) متزايدة فإنه يوجد

$$\exists\ \theta \in [a,b] ;\ I = f(\theta)[g(b)-g(a)]$$

نتيجة (1):

إذا كانت الدالة $g(x)=x$ عندئذ أحد الشرطين الآتيين:

1. f(x) مستمرة في المجال [a,b]
2. f(x) محددة التشبع [a,b]

كافي لوجود تكامل ريمان $(R)\int_a^b f(x)\,dg(x)$

نتيجة (2):

إذا كانت f(x) قابلة للتكامل حسب ريمان في [a,b] وكانت الدالة g(x) متزايدة على [a,b] فإنه توجد نقطة ما t . بحيث أن $t \in [a,b]$ بحيث يكون:

$$\exists\ t \in [a,b] ;\ (R)\int_a^b f(x)\,dg(x) = g(a)\int_a^t f(x)\,dg(x) + g(b)\int_t^b f(x)\,dg(x)$$